



SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES

ANÁLISE DE FOURIER

Jerônimo Silva Rocha
jeronimorocha@gmail.com



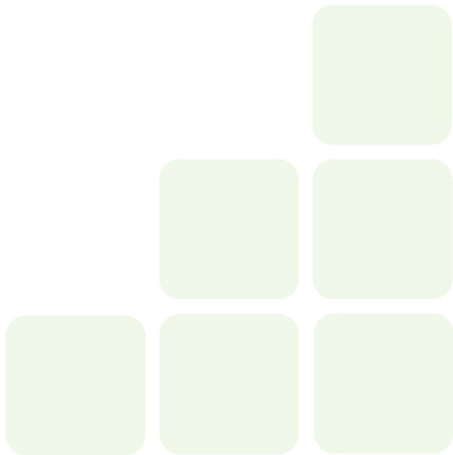
Transformada de Fourier

Sistemas Lineares

Filtros

Distorção

Energia, Potência e Autocorrelação





REPRESENTAÇÃO DE SINAIS APERIÓDICOS

- Para sinais aperiódicos, a representação em frequência pode ser obtida a partir das séries de Fourier no limite $T_0 \rightarrow \infty$
- Para um sinal $g(t)$, tem-se:
 - $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$ e $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]$
 - $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt$$
$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt$$
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df$$

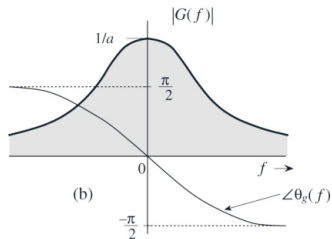
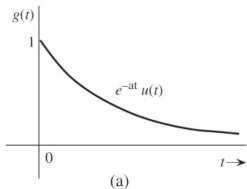


- $G(\omega)$ é em geral uma função complexa de ω
- $G(\omega) = |G(\omega)|e^{j\theta_g}$
- Quando $g(t)$ é real, tem-se:

$$G(-\omega) = G^*(\omega) \implies \left\{ \begin{array}{l} |G(\omega)| = |G(-\omega)| \\ \theta_g(\omega) = -\theta_g(-\omega) \end{array} \right\}$$



- Calcular a transformada de Fourier de $g(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$
- $G(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} e^{-j \arctan(\omega/a)}$

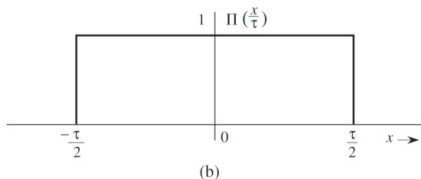
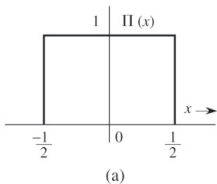




TRANSFORMADAS DE ALGUMAS FUNÇÕES

- A **função retangular** (*Unit Gate*) é definida como:

$$\text{rect}\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{T}{2} \\ 1, & |x| < \frac{T}{2} \end{cases}$$



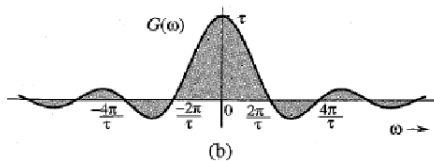
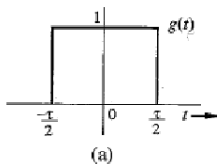


$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \iff G(\omega) = \frac{T \sin \omega T/2}{\omega T/2} = T \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

- A função $\text{Sa}(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$ possui as seguintes propriedades:
 - $\text{Sa}(x) = \text{sinc}(-x)$
 - $\text{Sa}(x) = 0 \implies \sin x = 0, x \neq 0 \implies x = \pm n\pi; n = \{1, 3, \dots\}$
 - $\text{Sa}(0) = 1$
 - $\text{Sa}(x)$ é uma função com período 2π que decresce de acordo com $1/x$



TRANSFORMADAS DE ALGUMAS FUNÇÕES



- O espectro do pulso retangular se estende até infinito (largura de banda infinita)
- Uma estimativa grosseira: $2\pi/T$ rad/s ou $1/THz$



TRANSFORMADAS DE ALGUMAS FUNÇÕES

- Impulso no tempo

$$\delta(t) \iff 1$$

- Impulso em frequência

$$1 \iff 2\pi\delta(\omega)$$

- Impulso em frequência deslocado

$$e^{j\omega_0 t} \iff 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{-j\omega_0 t} \iff 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$



TRANSFORMADAS DE ALGUMAS FUNÇÕES

- Cosseno

$$\begin{aligned}\cos \omega_0 t &= \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\ \mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]\end{aligned}$$

- Seno

$$\begin{aligned}\sin \omega_0 t &= \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \\ \mathcal{F}[\sin \omega_0 t] &= \pi j[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]\end{aligned}$$



PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

- Simetria

$$\begin{aligned}g(t) &\iff G(\omega) \\G(t) &\iff 2\pi g(-\omega)\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) &\iff T\text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\T\text{Sa}\left(\frac{tT}{2}\right) &\iff 2\pi\text{rect}\left(\frac{\omega}{T}\right)\end{aligned}$$



PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

- Scaling

$$g(t) \iff G(\omega)$$
$$g(at) \iff \frac{1}{|a|} G\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- $a > 1$, compressão no tempo resulta na expansão em frequência
- $a < 1$, expansão no tempo resulta na compressão em frequência



PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

- Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned}g(t) &\iff G(\omega) \\g(t - t_0) &\iff e^{-j\omega t_0} G(\omega)\end{aligned}$$

- Deslocamento em frequência

$$\begin{aligned}g(t) &\iff G(\omega) \\g(t)e^{j\omega_0 t} &\iff G(\omega - \omega_0)\end{aligned}$$

Sinal Modulado

$$g(t) \cos \omega_0 t \iff \frac{1}{2}[G(\omega - \omega_0) + G(\omega + \omega_0)]$$



PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

- Convolução

$$g(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)w(t - \tau)d\tau$$

- Convolução no tempo

$$\begin{aligned}g_1(t) &\iff G_1(\omega); & g_2(t) &\iff G_2(\omega) \\g_1(t) * g_2(t) &\iff G_1(\omega)G_2(\omega)\end{aligned}$$

- Convolução em frequência

$$\begin{aligned}g_1(t) &\iff G_1(\omega); & g_2(t) &\iff G_2(\omega) \\g_1(t)g_2(t) &\iff \frac{1}{2\pi}G_1(\omega) * G_2(\omega)\end{aligned}$$



PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

- Diferenciação no tempo

$$g(t) \iff G(\omega)$$
$$\frac{dg(t)}{dt} \iff j\omega G(\omega)$$

- Integração no tempo

$$g(t) \iff G(\omega)$$
$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \iff \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$



- Para um sistema LIT, a relação entre a entrada e a saída é dada por

$$y(t) = g(t) * h(t)$$

- No domínio da frequência, tem-se

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= G(\omega)H(\omega) \\ &= |Y(\omega)|e^{j\theta_y(\omega)} = |G(\omega)||H(\omega)|e^{j[\theta_g(\omega)+\theta_h(\omega)]} \end{aligned}$$

- Portanto,

$$\begin{aligned} |Y(\omega)| &= |G(\omega)||H(\omega)| \\ \theta_y(\omega) &= \theta_g(\omega) + \theta_h(\omega) \end{aligned}$$



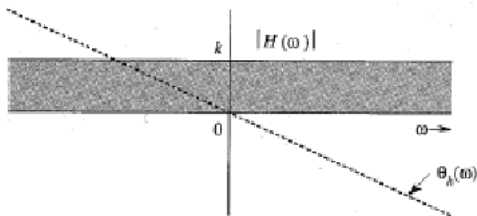
- Em uma transmissão sem distorção, a forma de onda de entrada deve ser preservada
 - Toleram-se atrasos e uma alteração uniforme na amplitude

$$y(t) = kg(t - t_d)$$

- No domínio da frequência, tem-se

$$Y(\omega) = kG(\omega)e^{-j\omega t_d} \rightarrow H(\omega) = ke^{-j\omega t_d}$$

- Resposta em amplitude constante - $|H(\omega)| = k$
- Resposta em fase linear - $\theta_h(\omega) = -\omega t_d$



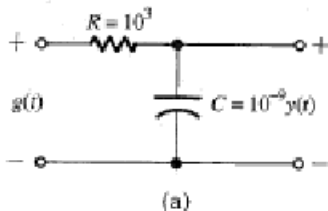
- O atraso pode ser representado pelo negativo da inclinação da resposta em fase

$$t_d(\omega) = -\frac{d\theta_h}{d\omega}$$

- $t_d(\omega)$ constante implica que todas as componentes do sinal são igualmente atrasadas por t_d
- Para um sistema sem distorção, $t_d(\omega)$ deve ser pelo menos constante na banda de interesse



Para o circuito RC, determinar $H(\omega)$, esboçar $|H(\omega)|$, $\theta_h(\omega)$ e $t_d(\omega)$. Para que a transmissão seja sem distorção, qual o requisito da largura de banda de $g(t)$ se a variação tolerada na resposta em amplitude é de 2% e de 5% no atraso? Qual é o atraso? Encontre $y(t)$.





$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{a}{a + j\omega}; \quad a = \frac{1}{RC} = 10^6$$

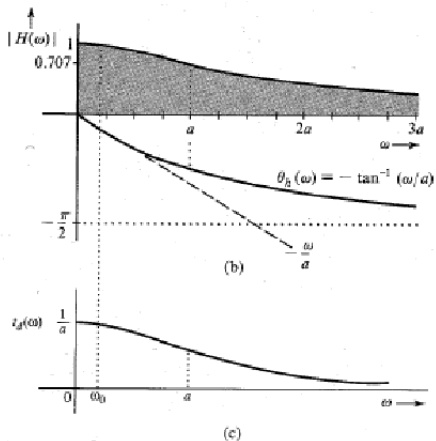
$$|H(\omega)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \simeq 1; \omega \ll a$$

$$\theta_h(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a} \simeq -\frac{\omega}{a}; \omega \ll a$$

$$t_d(\omega) = -\frac{d\theta_h}{d\omega} = \frac{a}{\omega^2 + a^2} \simeq \frac{1}{a} = 10^{-6}; \omega \ll a$$



EXEMPLO





- Como $H(0) = 1$ e $t_d(0) = 1/a$, a região de transmissão sem distorção é calculada como

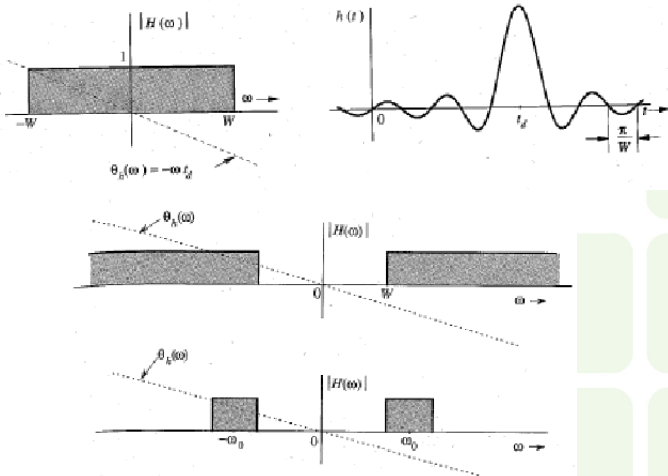
$$|H(\omega_0)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} \geq 0,98 \rightarrow \omega_0 \leq 203.000$$

$$t_d(\omega_0) = \frac{a}{\omega_0^2 + a^2} \geq \frac{0,95}{a} \rightarrow \omega_0 \leq 229.400$$

- Assim, a banda de $g(t)$ deve ser menor que 203.000 rad/s ou 32,31 kHz



- Em muitas situações práticas é necessário limitar o espectro de freqüências de um sinal
 - Melhor aproveitamento do espectro
 - Componentes de alta freqüência de pouca relevância na aplicação considerada
- Os filtros ideais permitem que a transmissão ocorra sem distorção em uma determinada banda e suprimem as freqüências fora dessa banda
- Os principais tipos de filtros são:
 - Passa-baixas (*Low-pass*)
 - Passa-altas (*High-pass*)
 - Passa-faixas (*Band-pass*)
 - Rejeita-faixas





- Os filtros ideais não são fisicamente realizáveis

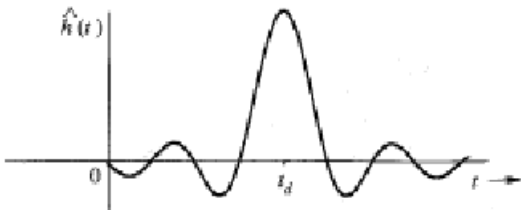
$$H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right) e^{-j\omega t_d} \rightarrow h(t) = \frac{W}{\pi} \text{sinc}[W(t - t_d)]$$

- $h(t)$ é não causal e portanto não é fisicamente realizável
- Outra forma de verificar se um filtro é fisicamente realizável é verificar se ele atende o critério de Paley-Wiener

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

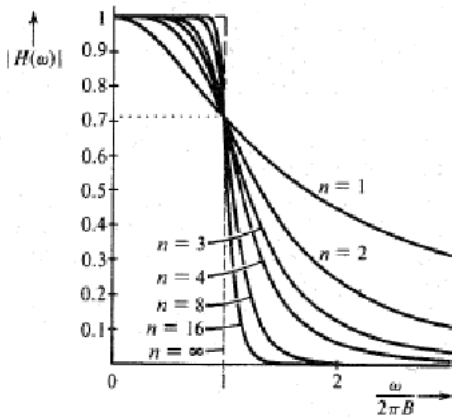


- Filtros fisicamente realizáveis podem ser obtidos truncando-se a parte negativa de $h(t)$, resultando em $\hat{h}(t) = h(t)u(t)$
- Se t_d é grande, $h(t)$ e $\hat{h}(t)$ são bastante próximos
 - $\hat{H}(\omega)$ é uma boa aproximação



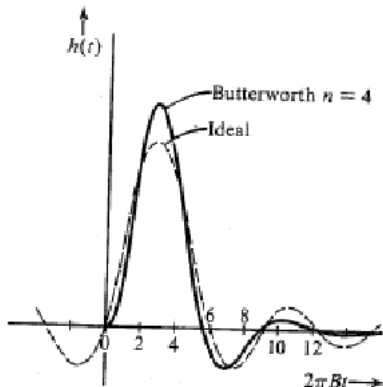
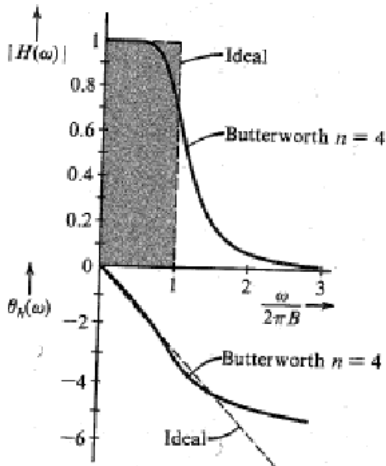


- Os filtros práticos não realizam cortes bruscos
- O espectro de amplitude do filtro de Butterworth se aproxima do filtro ideal quando $n \rightarrow \infty$





FILTROS DE BUTTERWORTH PARA $n = 4$

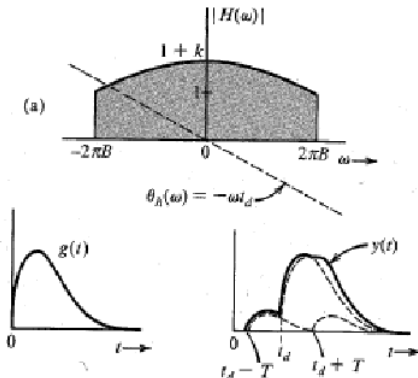




- Os sinais quando são transmitidos através de canais estão freqüentemente sujeitos à distorção
 - Características não ideais dos canais
- Os principais tipos de distorção são os seguintes:
 - Distorção linear
 - Distorção causada por não linearidades do canal
 - Distorção causada por efeitos de multipercurso
 - Desvanecimento (*Fading*)



- Quando as características do canal não são ideais, as componentes de Fourier não são igualmente afetadas
 - Componentes que se cancelavam podem não mais se cancelar
 - O resultado é o espalhamento ou dispersão dos pulsos de informação





DISTORÇÃO CAUSADA POR NÃO LINEARIDADES DO CANAL

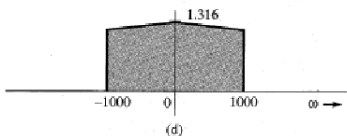
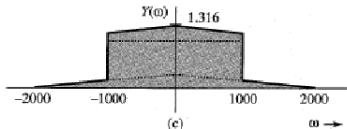
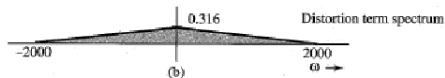
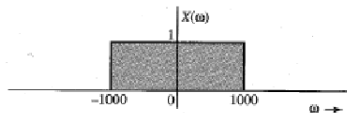
- O modelo de canal linear é válido apenas para pequenos sinais
 - Para grandes amplitudes, as características não lineares não podem ser negligenciadas

$$y = f(g) = a_0 + a_1g(t) + a_2g^2(t) + \dots + a_kg^k(t) + \dots$$

- Se $g(t)$ tem largura de banda de B Hz, então $g^k(t)$ tem largura de banda de kB Hz
 - Espalhamento ou dispersão espectral
 - Nocivo para sistemas multiplexados em frequência (FDM)



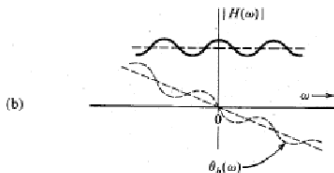
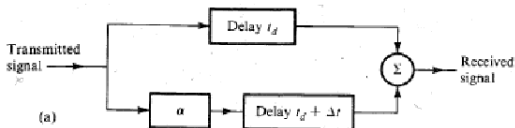
$$y(t) = x(t) + 0,001x^2(t)$$
$$x(t) = \frac{1000}{\pi} \text{sinc}(1000t)$$





DISTORÇÃO CAUSADA POR EFEITOS DE MULTIPERCURSO

- O sinal transmitido pode chegar no receptor através de dois ou mais caminhos
 - A atenuação e o atraso podem ser diferentes para cada caminho
 - A interferência entre os dois sinais dá origem ao **desvanecimento seletivo em frequência**





- A energia de um sinal $g(t)$ pode ser calculada no domínio do tempo a partir da seguinte expressão

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

- No domínio da frequência, de acordo com o teorema de Parseval, a energia de $g(t)$ pode ser calculada como

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$



- A partir da expressão de Parseval verifica-se que a energia pode ser obtida através da área do gráfico de $|G(\omega)|^2$
- Define-se então a **densidade espectral de energia** (DEE - ESD em inglês) como

$$\Psi_g(\omega) = |G(\omega)|^2$$

- Assim, tem-se que:

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) df$$

- Para um sistema LIT em que $y(t) = h(t) * g(t)$, então:

$$\Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \Psi_g(\omega)$$



- O espectro da maioria dos sinais se estende até o infinito
- Entretanto, como a energia é em geral finita, o espectro de amplitude tende a zero quando $\omega \rightarrow \infty$
- Pode-se então suprimir as componentes acima de B Hz ($2\pi B$ rad/s) com pouco efeito no sinal original
- Segundo esse critério, a largura de banda B é chamada de **largura de banda essencial**
- O critério para estimar B depende da aplicação considerada
 - Faixa de frequência que contém 95% da energia do sinal



Problema

Estime a largura de banda essencial W em rad/s do sinal $e^{-at}u(t)$, $a > 0$, sendo que essa banda deve conter 95% da energia do sinal.



Problema

Estime a largura de banda essencial W em rad/s do sinal $e^{-at}u(t)$, $a > 0$, sendo que essa banda deve conter 95% da energia do sinal.

Solução

$$g(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow G(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$
$$E_g = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{2a}$$
$$0,95 \frac{1}{2a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega \rightarrow W = (12,706.a) \text{ rad/s}$$



- Seja $g(t)$ um sinal em banda básica limitado em banda a B Hz ($2\pi B$ rad/s) com DEE igual a $\Psi_g(\omega)$
- Seja $\varphi(t) = g(t) \cos \omega_0 t$ um sinal modulado em amplitude, com $\omega_0 \geq 2\pi B$, tem-se que:

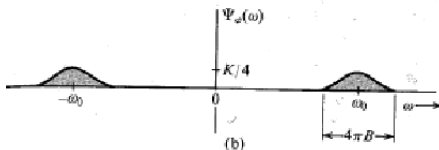
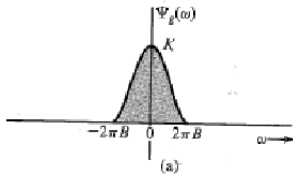
$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \mathcal{F}\{\varphi(t)\} = \frac{1}{2}[G(\omega + \omega_0) + G(\omega - \omega_0)] \\ \Psi_\varphi(\omega) &= |\Phi(\omega)|^2 = \frac{1}{4}|G(\omega + \omega_0) + G(\omega - \omega_0)|^2 \\ &= \frac{1}{4}[|G(\omega + \omega_0)|^2 + |G(\omega - \omega_0)|^2] \\ &= \frac{1}{4}[\Psi_g(\omega + \omega_0) + \Psi_g(\omega - \omega_0)]\end{aligned}$$



ENERGIA DE SINAIS MODULADOS

- Assim, a energia do sinal modulado corresponde à metade da energia do sinal em banda básica, ou seja

$$E_{\varphi} = \frac{1}{2} E_g$$





- A autocorrelação de um sinal real $g(t)$ é definida como

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t - \tau)dt$$

- Mostra-se que a autocorrelação é uma função par
- Um resultado importante relaciona a autocorrelação e a DEE

$$\psi_g(\tau) \iff \Psi_g(\omega) = |G(\omega)|^2$$



Problema

Calcule a função de autocorrelação no tempo de $g(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$ e obtenha a partir dela a DEE de $g(t)$

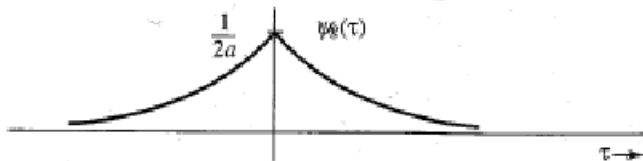
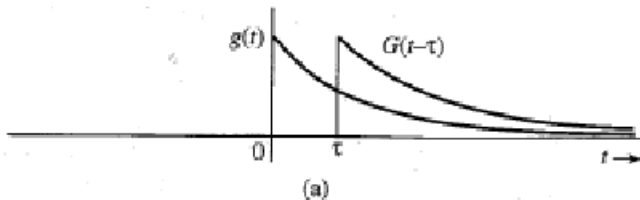


Problema

Calcule a função de autocorrelação no tempo de $g(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$ e obtenha a partir dela a DEE de $g(t)$

Solução

$$\begin{aligned}g(t) &= e^{-at}u(t); \quad g(t - \tau) = e^{-a(t-\tau)}u(t - \tau) \\ \psi_g(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t - \tau)dt = \frac{1}{2a}e^{-a\tau}, \quad \tau > 0 \\ \psi_g(\tau) &= \psi_g(-\tau) \rightarrow \psi_g(-\tau) = \frac{1}{2a}e^{a\tau}, \quad \tau < 0 \\ \psi_g(\tau) &= \frac{1}{2a}e^{-a|\tau|} \iff \Psi_g(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + a^2}\end{aligned}$$





- A potência de um sinal $g(t)$ é definida como

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt$$

- A potência pode ser interpretada como sendo a energia média da versão truncada de $g(t)$, definida por

$$g_T(t) = \begin{cases} g(t), & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

- Tem-se então,

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{gT}}{T}$$



- Analogamente ao que foi feito para os sinais de energia, pode-se mostrar que para um sinal de potência $g(t)$

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

- Define-se então a **Densidade Espectral de Potência** (DEP - PSD em inglês) de $g(t)$ como sendo

$$S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T}$$

- Logo, a potência pode ser expressada como

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega$$



AUTOCORRELAÇÃO DE SINAIS DE POTÊNCIA

- A autocorrelação no tempo para um sinal de potência real $g(t)$ é definida como

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_g(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t + \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t - \tau) dt\end{aligned}$$

- $\mathcal{R}_g(\tau)$ é uma função par



AUTOCORRELAÇÃO DE SINAIS DE POTÊNCIA

- Como

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t)g_T(t + \tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_{g_T}(\tau)}{T}$$

- Tem-se que

$$\mathcal{R}_g(\tau) \iff \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} = S_g(\omega)$$

- O valor médio quadrático (RMS) de $g(t)$ é dado por $[g(t)]_{RMS} = \sqrt{P_g}$
- A relação entre a DEP da saída de um sistema LIT e a DEP da entrada é dada por

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega)$$